Clase 10: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Aplicaciones de la TL

Ya ilustramos (en la clase 9) 3 aplicaciones de la TL: cómputo de productos de convolución, cómputo de $s.f.$ causales de ODLCC, cómputo de una solución causal y Laplace transformable de una ED con coeficientes constantes.

Veamos más aplicaciones mediante ejemplos concretos.

Ejemplo 1. *(a) Sea la EC*

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\operatorname{sen}(2x), \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

que ya resolvimos en $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ en la clase 7. Buscamos una solución causal y Laplace transformable $u(x)$.

<u>Asumiendo</u> la existencia de una solución causal y Laplace transformable $u(x)$ de (1), tenemos

$$h(x)x^2 * u(x) = h(x)\operatorname{sen}(2x) \xrightarrow[2.]{\mathcal{L}} F(z)U(z) = G(z) \tag{2}$$

donde

$$h(x)x^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z), \quad u(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(z), \quad h(x)\operatorname{sen}(2x) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(z).$$

Para hallar $F(z)$ tenemos $f(x) = h(x)x^2 \Longrightarrow f'_{gen}(x) = 2h(x)x \Longrightarrow f''_{gen}(x) = 2h(x)$ $\Longrightarrow f'''_{gen}(x) = 2\delta(x) \xrightarrow[3.]{\mathcal{L}} z^3F(z) = 2 \Longrightarrow F(z) = \dfrac{2}{z^3}$. De la tabla tenemos $G(z) = \dfrac{2}{z^2+4}$, luego con (2),

$$U(z) = \frac{z^3}{z^2+4} = z - \frac{4z}{z^2+4} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\underset{tabla}{=\!\!\longrightarrow}} u(x) = \delta'(x) - 4h(x)\cos(2x)$$

como solución particular causal y Laplace transformada de (1) (sustitución en (1) revela que realmente es solución).

(b) Sea la EC

$$h(x)x^2 * u(x) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

con $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. *Como* <u>*no sabemos*</u> *si* g *es Laplace transformable,* <u>*no podemos*</u> *aplicar la TL a (3). Pero podemos usar la TL para hallar una s.f. causal y Laplace transformable de* $h(x)x^2*$. *Tenemos*

$$h(x)x^2 * E(x) = \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{z^3}\Xi(z) = 1 \implies \Xi(z) = \frac{1}{2}z^3 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E(x) = \frac{1}{2}\delta'''(x),$$

luego $u(x) = E(x) * g(x) = \frac{1}{2}\delta'''(x) * g(x) = \frac{1}{2}g'''_{gen}(x)$ *es solución causal de (3). Aplicando este resultado con* $g(x) = h(x)\operatorname{sen}(2x)$ *como en (a), obtenemos*

$$u(x) = \frac{1}{2}(h(x)\operatorname{sen}(2x))'''_{gen} = -4h(x)\cos(2x) + \delta'(x)$$

como en (a) (es el mismo cómputo como en la página 7.5 de la Clase 7)

Ejemplo 2. *Sea el PVI*

$$\begin{cases} u''(t) + 4u(t) = e^{-2t}; & -\infty < t < \infty \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

Como en la Clase 7 reemplazamos el PVI por una sola ED en sentido distribucional. Ponemos $v(t) = h(t)u(t)$ *donde* $u(t)$ *es* <u>*la*</u> *solución buscada. Tenemos*

$$v'_{gen}(t) = h(t)u'(t) + u(0)\delta(t) = h(t)u'(t),$$

luego

$$\begin{aligned} v''_{gen}(t) &= h(t)u''(t) + u'(0)\delta(t) = h(t)u''(t) + \delta(t) \\ \implies \quad v''_{gen}(t) + 4v(t) &= h(t)[u''(t) + 4u(t)] + \delta(t) \\ \overset{ED}{\implies} \quad v''_{gen}(t) + 4v(t) &= h(t)e^{-2t} + \delta(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora, aplicando directamente la TL a (4), tenemos (tabla: $h(t)e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z-\lambda}$*)*

$$\begin{aligned} (4) \xrightarrow{\mathcal{L}} (z^2+4)V(z) &= \frac{1}{z+2} + 1 = \frac{z+3}{z+2} \\ \Rightarrow V(z) &= \frac{z+3}{(z+2)(z^2+4)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aplicando fracciones parciales,

$$V(z) = \frac{1/8}{z+2} + \frac{-\frac{1}{8}z + 5/4}{z^2+4} = \frac{1}{8}\frac{1}{z+2} - \frac{1}{8}\frac{z}{z^2+4} + \frac{5}{8}\frac{2}{z^2+4}$$

$$\xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}^{-1}} v(t) = \frac{1}{8}h(t)\left[e^{-2t} - \cos(2t) + 5\,\mathrm{sen}(2t)\right], \quad v(t) = h(t)u(t)$$

y la solución del PVI es

$$u(t) = \frac{1}{8}\left[e^{-2t} + 5\,\mathrm{sen}(2t) - \cos(2t)\right]; \quad -\infty < t < \infty$$

Alternativamente podemos aplicar a (2) el método de los residuos. Los polos de $V(z)$ son $z = -2, \pm 2i$, y encontramos (¡verifique!).

$$\begin{aligned} v(t) &= h(t)\left[\frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{1}{16}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) - \frac{5i}{16}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right)\right] = (\textit{fórmulas de Euler}) \\ &= \frac{1}{8}h(t)\left[e^{-2t} - \cos(2t) + 5\,\mathrm{sen}(2t)\right] \end{aligned}$$

como antes.

Ejemplo 3. *Sea $E(t) = \frac{1}{2}h(t)t^2e^t$. Se pide hallar un ODLCC L que tenga $E(t)$ como s.f.. Aplicamos la TL. Tenemos*

$$LE = \delta \Longrightarrow (L\delta) * E = \delta \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(L\delta)(z)\Xi(z) = 1.$$

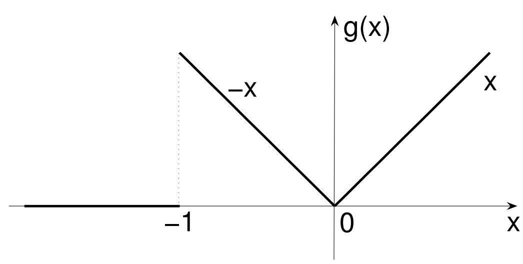
Pero también

$$\frac{1}{2}h(t)t^2e^t \xrightarrow[tabla]{\mathcal{L}} \Xi(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$$

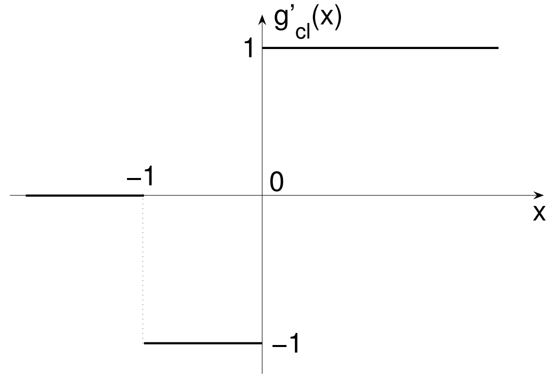
$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(L\delta)(z) &= (z-1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (L\delta)(t) &= \delta'''(t) - 3\delta''(t) + 3\delta'(t) - \delta(t) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad L = \frac{d^3}{dt^3} - 3\frac{d^3}{dt^3} + 3\frac{d}{dt} - 1.$$

Ejemplo 4. *Se pide hallar $f(x) = h(x+1)|x| * h(x)x$. Sea $g(x) = h(x+1)|x|$.*



$$g'_{gen}(x) = g'_{cl}(x) + \delta_{-1}(x)$$



$$g''_{gen}(x) = g''_{cl}(x) - \delta_{-1}(x) + 2\delta(x) + \delta'_{-1}(x)$$

$$g''_{gen}(x) = -\delta_{-1}(x) + 2\delta(x) + \delta'_{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} z^2 G(z) = -e^z + 2 + ze^z \quad \Longrightarrow \quad G(z) = \frac{2 + (z-1)e^z}{z^2} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) * h(x)x \xrightarrow[(6),tabla]{\mathcal{L}} F(z) = \frac{2 + (z-1)e^z}{z^2}\frac{1}{z^2} \\ &= \frac{2 + ze^z - e^z}{z^4} = \frac{2}{z^4} + \frac{e^z}{z^3} - \frac{e^z}{z^4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \\ f(x) &= \frac{1}{3}h(x)x^3 + \frac{1}{2}h(x+1)(x+1)^2 - \frac{1}{6}h(x+1)(x+1)^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 5. *Sea L una ODLCC cuyo s.f. causal es*

$$E(t) = h(t)(1 - e^{-t}) \tag{7}$$

Se pide hallar una solución causal de la ED

$$Lu(t) = h(t)t; \quad -\infty < t < \infty \tag{8}$$

Como $E(t)$ y $h(t)t$ son ambas causales, existe $E(t) * h(t)t$ y sabemos que

$$u(t) = E(t) * h(t)t \ \text{ es una solución de (8)} \tag{9}$$

Para hallar este producto de convolución aplicamos las reglas operacionales de la convolución:

$$\text{(9)} \implies u'_{gen}(t) = E(t) * h(t) \implies u''_{gen}(t) = E(t) * \delta(t)$$

$$\implies u''_{gen}(t) = E(t). \tag{10}$$

<u>*Suponiendo*</u> *que $u(t)$ es Laplace transformable, tenemos*

$$\text{(10)} \xrightarrow{\mathcal{L}} z^2 U(z) = \Xi(z) \ \text{ con } \ E(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Xi(z). \tag{11}$$

Pero

$$E(t) = h(t) - h(t)e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}$$

entonces (11) da

$$z^2 U(z) = \frac{1}{z(z+1)} \implies U(z) = \frac{1}{z^3(z+1)}$$

$$\begin{aligned} \implies U(z) &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) &= \frac{1}{2}h(t)t^2 - h(t)t + h(t) - h(t)e^{-t} \\ \implies u(t) &= h(t)\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1 - e^{-t}\right), \end{aligned}$$

que es causal.

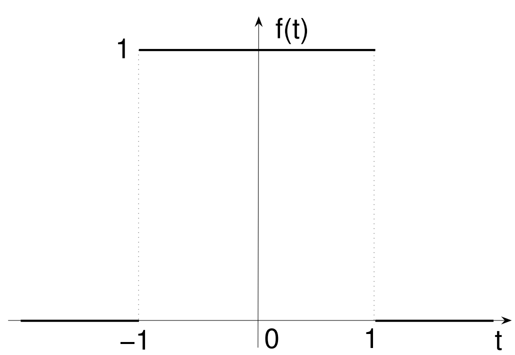
Dejamos al lector verificar que $L = \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}$ y que $u(t)$ es solución de (8).

Ejemplo 6. *Buscamos una solución causal de*

$$h(t)\,\text{sen}(2t) * u(t) = f(t) \quad -\infty < t < \infty$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 1; & -1 < t < 1 \\ 0; & \textit{otro } t \end{cases}$$



Manera 1. *Hallemos primero la s.f. causal de* $h(t)\,\mathrm{sen}(2t)*$. *Tenemos*

$$\begin{aligned} h(t)\,\mathrm{sen}(2t) * E(t) &= \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{z^2+4}\Xi(z) = 1 \\ \Longrightarrow \quad \Xi(z) &= \frac{1}{2}z^2 + 2 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} E(t) = \frac{1}{2}\delta''(t) + 2\delta(t), \end{aligned}$$

luego

$$u(t) = \left[\frac{1}{2}\delta''(t) + 2\delta(t)\right] * f(t) = \frac{1}{2}f''_{gen}(t) + 2f(t). \tag{12}$$

Pero $f'_{gen}(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_1(t) \implies f''_{gen}(t) = \delta'_{-1}(t) - \delta'_1(t)$, *luego con (12)*

$$u(t) = \frac{1}{2}\delta'_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta'_1(t) + 2f(t),$$

listo.

Manera 2. *Aplicando directamente la TL a la EC resulta*

$$\frac{2}{z^2+4}U(z) = F(z). \tag{13}$$

Pero $f'_{gen}(t) = \delta_{-1}(t) - \delta_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} zF(z) = e^z - e^{-z} \Longrightarrow F(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z}$ *luego con (13)*

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{z^2+4}{2}\frac{e^z - e^{-z}}{z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)\left(e^z - e^{-z}\right) \\ &= \frac{1}{2}ze^z - \frac{1}{2}ze^{-z} + \frac{2}{z}e^z - \frac{2}{z}e^{-z} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}\delta'_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta'_1(t) + 2h(t+1) - 2h(t-1) \\ &= \frac{1}{2}\delta'_{-1}(t) - \frac{1}{2}\delta'_1(t) + 2f(t). \end{aligned}$$

Ejemplo 7. *Sea la ED lineal con coeficientes* <u>*variables*</u>

$$(1-t)u''(t) + tu'(t) - u(t) = 0; \quad -\infty < t < \infty \tag{14}$$

Si existe solución causal y Laplace transformable $u(t)$, *la podemos encontrar mediante la TL. Tenemos la regla operacional* $t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(z)$, *de modo que*

$$-tu''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (z^2U(z))', \;\; tu'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -(zU(z))',$$

es decir,

$$-tu''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2zU(z) + z^2U'(z), \;\; tu'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -U(z) - zU'(z)$$

y

$$\textit{(14)} \xrightarrow{\mathcal{L}} (z^2 - z)U'(z) + (z^2 + 2z - 2)U(z) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad U'(z) = -\frac{z^2+2z-2}{z(z-1)}U(z) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dU}{U} = -1 - \frac{2}{z} - \frac{1}{z-1}$$

$$\Longrightarrow \quad U(z) = A\frac{e^{-z}}{z^2(z-1)}, \quad A \in \mathbb{C} \ \ \textit{arbitraria}$$

$$\Longrightarrow \quad U(z) = Ae^{-z}\left(\frac{-1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) = Ah(t-1)(e^{t-1}-t). \tag{15}$$

Sustitución de (15) en (14) muestra que $A(e^{t-1}-t)$ es solución de (14). La solución general clásica de (14) es $Be^t + ct$ ($B, C \in \mathbb{C}$ arbitraria). La TL nos ha producido una solución particular de (14)